MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 13
29.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Man erhält genau dieselben Kombinationen, wenn man, statt aus Alissas Tüte, aus einer Urne mit genau 5 verschiedenfarbigen Bärchen (rot, gelb, grün, weiß und orange) 5-mal mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zieht. Das Buch hat dementsprechend genau

$$\binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{24} = 126$$

Seiten.

b) i) Nachdem es genau 5 verschiedene Farben gibt, gibt es 5 rein einfarbige Kombinationen.

ii) Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, 2 verschiedene Farben für die beiden Bärchenpaare auszuwählen; für das übrige Bärchen stehen dann noch 3 Farben zur Verfügung. Insgesamt gibt es also

$$\binom{5}{2}\cdot 3 = 10\cdot 3 = 30$$

Kombinationen mit zweimal zwei gleichfarbigen Bärchen.

iii) Zwei der Bärchen sind laut Vorgabe gelb; für die restlichen 3 Bärchen stehen noch 4 Farben zur Verfügung. Entsprechend dem 3-maligen Ziehen aus einer Urne mit 4 Kugeln (rot, grün, weiß und orange) mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge haben wir

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

Kombinationen mit genau zwei gelben Bärchen.

2. a) Genau zu jeder Menge von zweien der 20 Personen findet ein Händedruck statt; es gibt also so viele Händedrücke wie zweielementige Teilmengen einer Menge mit 20 Elementen, und deren Anzahl beträgt

$$\binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{2\cdot 1} = 190.$$

Alternativ kann man sich die 20 Personen auch in einer Reihe aufgestellt denken. Die erste Person verabschiedet sich nun und gibt den 19 anderen Personen die Hand. Die zweite Person gibt noch 18 Personen die Hand. Insgesamt werden also

$$19+18+\cdots+1 = \sum_{k=1}^{19} k = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$$

Hände geschüttelt. In der obigen Rechnung haben wir 5.4a), also den “kleinen Gauß” verwendet.

b) Eine mögliche Art zu zählen wäre die folgende: Verabschiedet sich ein Ehepaar von einem anderen, werden $2 \cdot 2 = 4$ Händedrücke ausgetauscht. Das passiert genau so oft, wie Mengen aus zwei Ehepaaren gibt, also $\binom{15}{2}$ mal. Insgesamt werden also

$$4 \cdot \binom{15}{2} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 420$$

Händedrücke ausgetauscht.

Alternative Zählweise: Die Situation ist wie in a) mit 30 Personen, mit dem Unterschied, daß sich Eheleute nicht voneinander verabschieden, weil sie ja gemeinsam nach Hause gehen. Von allen $\binom{30}{2}$ möglichen Händedruckpaaren finden also 15 nicht statt, so daß zu insgesamt

$$\binom{30}{2} - 15 = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} - 15 = 420$$

Händedrücken kommt.
Verschiedene Möglichkeiten, die selbe kombinatorische Größe zu zählen, führen oft zu eleganten Beweisen für Formeln mit Binomialkoeffizienten: Verallgemeinern wir von 15 auf n Ehepaare, so beweisen unsere beiden Zählvarianten die Formel

$$4 \cdot \binom{n}{2} = \binom{2n}{2} - n \quad \text{für alle } n \geq 2$$

(die man natürlich auch direkt rechnerisch überprüfen, aber vielleicht nicht so leicht entdecken könnte).

c) Bei jedem Abschied eines Ehepaars von einem anderen werden 4 **Küßchen** ausgetauscht (zwei unter den Damen, jeweils einer vom einen Herrn an die andere Dame und umgekehrt). Da wir schon gesehen haben, daß $\binom{15}{2}$ Abschiede von Ehepaaren stattfinden, werden insgesamt

$$4 \cdot \binom{15}{2} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 420$$

Küßchen gegeben.

Ebenso finden bei jedem Abschied zweier Ehepaare drei Händedrücke statt (nämlich je einer zwischen allen Kombinationen außer den beiden Damen). Damit werden insgesamt

$$3 \cdot \binom{15}{2} = 3 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 315$$

Händedrücke getauscht.

3. a) Es ist

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tau \circ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(immer daran denken, die Komposition „von rechts nach links“ abzuarbeiten!). Außerdem ist

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 6 & 3 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(Lesen der gegebenen Permutation „von unten nach oben“).

b) Das gelingt durch Auflösen: Es gilt $\sigma \circ \alpha = \tau \iff \alpha = \sigma^{-1} \circ \tau$, also tut

$$\begin{aligned} \alpha := \sigma^{-1} \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 2 & 6 & 4 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das Gewünschte. Ebenso gilt $\beta \circ \sigma = \tau \iff \beta = \tau \circ \sigma^{-1}$, also tut

$$\begin{aligned} \beta := \tau \circ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das Verlangte.

c) Um σ als Produkt von (sogar disjunkten) *Zyklen* zu schreiben, führt man das folgende Selbstgespräch:

> *Beginnen wir mit der* 1*. Es ist* $\sigma(1) = 6$*; die* 6 *geht weiter auf die* 8*, diese auf die* 4*, dann weiter auf die* 3*, und die* 3 *geht zurück auf die* 1*. Also notiere ich schon einmal den Zyklus* $(1\ 6\ 8\ 4\ 3)$*.*
> *Die erste noch nicht bearbeitete Zahl ist die* 2*; sie geht auf* $\sigma(2) = 5$*, die* 5 *weiter auf die* 7*, und die zurück auf die* 2*. Also notiere ich den Zyklus* $(2\ 5\ 7)$*. Jetzt habe ich alle Zahlen bearbeitet und bin fertig; die Lösung bekomme ich durch Komposition der erhaltenen Zyklen in beliebiger Reihenfolge:*
>
> $$\sigma = (1\ 6\ 8\ 4\ 3) \circ (2\ 5\ 7) = (2\ 5\ 7) \circ (1\ 6\ 8\ 4\ 3).$$

Um σ sogar als Produkt von *Transpositionen* zu schreiben, wendet man auf die schon gewonnene Darstellung als Produkt von Zyklen eine der Formeln aus der Vorlesung an, die Zyklen in Transpositionen zerlegen: Es ist

$$\begin{aligned} (1\ 6\ 8\ 4\ 3) &= (1\ 6) \circ (6\ 8) \circ (8\ 4) \circ (4\ 3) \\ \textit{oder:} \quad &= (1\ 3) \circ (1\ 4) \circ (1\ 8) \circ (1\ 6), \end{aligned}$$

und durch Verwendung einer ähnlichen Zerlegung für $(2\ 5\ 7)$ ergibt sich schließlich

$$\sigma = \underbrace{(1\ 6) \circ (6\ 8) \circ (8\ 4) \circ (4\ 3)}_{=(1\ 6\ 8\ 4\ 3)} \circ \underbrace{(2\ 5) \circ (5\ 7)}_{=(2\ 5\ 7)}$$

als eine von vielen verschiedenen möglichen Lösungen.

Das gleiche Spiel liefert für die Permutation τ zunächst

$$\tau = (1\ \ 2\ \ 7) \circ (3\ \ 5) \circ (4\ \ 8\ \ 6)$$

und damit beispielsweise

$$\tau = (1\ \ 2) \circ (2\ \ 7) \circ (3\ \ 5) \circ (4\ \ 8) \circ (8\ \ 6).$$

d) In c) haben wir gesehen, daß σ sich als Produkt von 6 Transpositionen schreiben läßt, also ist σ eine *gerade* Permutation, d.h. $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$.

Ebenso ist τ als Produkt von 5 Transpositionen eine *ungerade* Permutation, d.h. $\mathrm{sign}(\tau) = -1$.

4. a) Es ist

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Insbesondere sieht man, daß $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ ist.) Außerdem ergibt sich

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sigma^1 &= \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
\sigma^2 &= \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \\
\sigma^3 &= \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
\sigma^4 &= \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{id}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich weiter $\sigma^5 = \sigma^4 \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma$, entsprechend $\sigma^6 = \sigma^2$ usw., und die allgemeinen Formeln lautet: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
\sigma^{4k} &= (\sigma^4)^k = \mathrm{id}^k = \mathrm{id}, \\
\sigma^{4k+1} &= \sigma^{4k} \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma, \\
\sigma^{4k+2} &= \sigma^{4k} \circ \sigma^2 = \mathrm{id} \circ \sigma^2 = \sigma^2, \\
\sigma^{4k+3} &= \sigma^{4k} \circ \sigma^3 = \mathrm{id} \circ \sigma^3 = \sigma^3.
\end{aligned}$$

Für die Potenzen von τ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tau^1 &= \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\
\tau^2 &= \tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\
\tau^3 &= \tau^2 \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{id}.
\end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt das

$$\begin{aligned} \tau^{3k} &= (\tau^3)^k = \mathrm{id}^k = \mathrm{id}, \\ \tau^{3k+1} &= \tau^{3k} \circ \tau = \mathrm{id} \circ \tau = \tau, \\ \tau^{3k+2} &= \tau^{3k} \circ \tau^2 = \mathrm{id} \circ \tau^2 = \tau^2. \end{aligned}$$

Nun noch zur Ordnung: Diese ist für eine Permutation $\alpha \in S_n$ definiert als das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für welches $\alpha^k = \mathrm{id}$ gilt.
Gemäß unserer obigen Rechnungen ist die Ordnung von σ also 4, und die Ordnung von τ ist also 3.

Beides hätte man auch (schneller) darurch gesehen, daß man σ und τ in paarweise disjunkte Zyklen zerlegt hätte: Es ist nämlich

$$\sigma = (1\ \ 2\ \ 5\ \ 4) \circ (3\ \ 6) \qquad \text{und} \qquad \tau = (1\ \ 5\ \ 3) \circ (2\ \ 4\ \ 6).$$

Mit 6.16 gilt nun: Hat man eine Permutation in paarweise disjunkte Zyklen zerlegt, so ist die Ordnung der Permutation das kleinste gemeinsame Vielfache der Zyklenlängen; also bei uns:

Die Ordnung von σ ist $\mathrm{kgV}(4,2) = 4$, und
die Ordnung von τ ist $\mathrm{kgV}(3,3) = 3$ ✓